

Sumário

1 Fundamentos de Demografia, 1

- 1.1 Introdução, 1
- 1.2 Movimento das populações, 2
- 1.3 A hidrografia e as populações, 4
- 1.4 Conurbações, 5
- 1.5 Densidade demográfica, 6
- 1.6 Morbidade ou morbidade, 9
- 1.7 Tábua de mortalidade ou sobrevivência, 12
- 1.8 Idade média de uma população, 12
- 1.9 Idade mediana, 13
- 1.10 Vida média ou esperança de vida ao nascer, 13
- 1.11 Vida mediana ou vida provável, 13
- 1.12 Envelhecimento de uma população, 13
- 1.13 Índice de envelhecimento, 14
- 1.14 Reflexões sobre as tábuas, 15
- 1.15 Simbologia e notações, 16
- 1.16 Cultura atuarial – histórica e demográfica, 18
- 1.17 A função de sobrevivência, 21

2 As Tábuas e suas Funções Biométricas, 23

- 2.1 As tábuas de mortalidade ou sobrevivência , 23

- 2.2 Construção das tábuas de sobrevivência ou mortalidade, 25
- 2.3 Relações demográficas, 26
- 2.4 Estatísticas em saúde, 27
- 2.5 Tecnologias e futuro, 28
- 2.6 Tábuas de serviço no Brasil, 30
- 2.7 O diagrama de Lexis, 31
- 2.8 As probabilidades, 33
- 2.9 Um pouco de cultura institucional, 34

3 Esperança Matemática, 36

- 3.1 Noções de jogo, sinistro, seguro, prêmio e prêmio comercial, 36
- 3.2 Prêmio comercial (P_c), 37
- 3.3 Risco, sinistro e seguro, 38
- 3.4 Taxa estatística, 38
- 3.5 Carregamento ou sobrecarga, 38
- 3.6 Valor matemático do risco (VMR), 39
- 3.7 Custo médio por sinistro (CMS), 39
- 3.8 Prêmio estatístico (PE), 39
- 3.9 Cálculo do prêmio comercial (P_c), 40

4 As Funções Biométricas sobre uma Vida ou mais Vidas, 42

- 4.1 Probabilidade de sobrevivência em n anos. Outra forma de demonstração, 42
- 4.2 Probabilidade de falecimento em n anos. Outra forma de demonstração, 42
- 4.3 Probabilidade de uma pessoa de idade x falecer antes de completar a idade $x + n$, 43
- 4.4 Probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver à idade $x + n$, vindo a falecer antes de completar a idade $x + n + 1$ (no decorrer do ano seguinte), 44
- 4.5 Probabilidade de uma pessoa de idade x vir a falecer entre as idades $x + n$ e $x + n + m$, 45
- 4.6 Probabilidades sobre mais cabeças, 45
- 4.7 Probabilidade de “ao menos” um indivíduo estar vivo ao fim de n anos, 46
- 4.8 Probabilidade de existir exatamente uma cabeça (um só indivíduo) com vida dentro de n anos, 46
- 4.9 Probabilidades para três cabeças, 47
- 4.10 Probabilidades envolvendo qualquer quantidade de cabeças, 47
- 4.11 Probabilidades das partes, 48
- 4.12 Probabilidade de falecimento em grupos abertos, 49
- 4.13 Outras funções biométricas, 50
 - 4.13.1 Pessoas vivas na metade da idade x (L_x), 50

- 4.13.2 Taxa central de mortalidade, 50
- 4.13.3 Vida provável (Vp), 52
- 4.13.4 Vida provável de pessoas de um mesmo grupo e com a mesma idade, 54
- 4.13.5 Cultura institucional – informações gerais, 55

5 Funções Biométricas Complementares, 57

- 5.1 Quantidade de existência = T_x , 57
- 5.2 Esperança completa de vida – e_x^0 , 59
- 5.3 Expectativa abreviada de vida (e_x) ou vida média abreviada, 60
- 5.4 Relações algébricas entre (e_x^0) e (e_x), 62
- 5.5 Análise gráfica de l_x , 63
- 5.6 Definições, curiosidades e considerações existentes entre esperança completa ou vida média e esperança abreviada de vida, 63
- 5.7 Relações algébricas entre vida média ou esperança completa de vida ou vida média longa (e_x^0), vida média abreviada (e_x) e probabilidade de vida, 64
- 5.8 Vida média a partir de uma idade, 65
- 5.9 Vida média num intervalo de tempo, 65
- 5.10 Duração média de vida (Dm), 65
- 5.11 Montagem e elaboração de tábua de sobrevivência/mortalidade em função do grupo inicial e os falecimentos, 65
- 5.12 Coeficiente instantâneo de mortalidade, 66
- 5.13 Interpretação empírica, 68
- 5.14 Taxa instantânea de mortalidade para um grupo de pessoas, 71
- 5.15 Um pouco de cultura institucional. As tábuas de mortalidade nas empresas de previdência, 71

6 Modelos Clássicos de Seguros: Engenharia e Aplicações de Cálculo nos Riscos, 75

- 6.1 De pessoas, 75
- 6.2 Seguros por sobrevivência, 78
 - 6.2.1 Seguro dotal puro, 78
 - 6.2.2 Seguro dotal puro a prêmio único, 78

7 Rendas, 82

- 7.1 Rendas certas, 82
- 7.2 Rendas aleatórias, 82
- 7.3 Rendas por sobrevivência, 82
- 7.4 Descrição e classificação das rendas, 83

- 7.4.1 Renda aleatória, constante, imediata, periódica anual, vitalícia postecipada, 84
- 7.4.2 Renda aleatória, periódica anual, imediata, temporária, postecipada, 87
- 7.4.3 Renda aleatória constante, periódica anual, imediata, vitalícia e antecipada, 88
- 7.4.4 Renda aleatória constante, periódica anual, vitalícia, diferida de n anos, postecipada, 89
- 7.4.5 Renda aleatória, periódica anual, imediata, temporária, antecipada – ou prêmio único puro (PUP) de uma renda unitária, pagável a uma pessoa de idade x no início de cada ano e enquanto viver, mas no máximo até completar $(x + n)$ anos, 90
- 7.4.6 Renda aleatória, periódica anual, vitalícia, diferida de n anos, antecipada, 91
- 7.4.7 Renda aleatória constante, periódica anual, diferida, temporária antecipada, 92
- 7.4.8 Renda aleatória constante, periódica anual, temporária, diferida e postecipada, 93

8 Comutações, 95

- 8.1 As comutações, 95
- 8.2 Tábuas de trabalho, 96

9 Modelos Clássicos de Seguro, 109

- 9.1 Seguro por sobrevivência. Capital – prêmio único – utilizando comutações, 109
- 9.2 Sobrevivência – rendas – aplicações das comutações, 111
 - 9.2.1 Renda vitalícia antecipada, 111
 - 9.2.2 Renda vitalícia, diferida e antecipada, 112
 - 9.2.3 Renda vitalícia diferida postecipada, 113
 - 9.2.4 Renda temporária imediata antecipada, 114
 - 9.2.5 Renda temporária imediata postecipada, 115
 - 9.2.6 Renda temporária diferida antecipada, 115
- 9.3 Seguros por falecimento, 116
 - 9.3.1 Seguro temporário de um ano a prêmio único (falecimento), 117
 - 9.3.2 Seguro de vida inteira – pago pelo segurador no final do ano, 118
 - 9.3.3 Seguro de vida inteira – pago pelo segurador no início do ano, 120
 - 9.3.4 Seguros por falecimento – capital – prêmio único, 121
 - 9.3.5 Vida inteira – prêmio único puro, 121
 - 9.3.6 Vida inteira – diferido, 122
 - 9.3.7 Vida, temporário e imediato ou pecúlio temporário, 123
 - 9.3.8 Vida, temporário diferido, 123

- 9.4 Seguros dotais, 124
- 9.5 Prêmios periódicos anuais (prêmios nivelados), 125
 - 9.5.1 Vida inteira a prêmios anuais vitalícios. Prêmio vitalício, 125
- 9.6 Rendas fracionadas ou em subperíodos do ano, 127
 - 9.6.1 Rendas vitalícias constantes fracionadas, 127
 - 9.6.2 Análise parcial de como se processa a lógica do fracionamento, 129
 - 9.6.3 Anuidade vitalícia fracionada postecipada em subperíodos, 131
 - 9.6.4 Anuidade vitalícia fracionada antecipada, 131
 - 9.6.5 Anuidade vitalícia diferida fracionada postecipada, 131
 - 9.6.6 Anuidade vitalícia diferida fracionada antecipada, 131
 - 9.6.7 Anuidade temporária fracionada postecipada, 131
 - 9.6.8 Anuidade temporária fracionada antecipada, 131
 - 9.6.9 Anuidade temporária de n anos, fracionada e diferida de m antecipada, 131
 - 9.6.10 Anuidade temporária de n anos, fracionada e diferida de m postecipada, 132
 - 9.6.11 Anuidade temporária de k , diferida de n anos, fracionada postecipada, 132
 - 9.6.12 Anuidade temporária de k , diferida de n anos, fracionada antecipada, 132
 - 9.6.13 Anuidades vitalícias postecipadas fracionadas, 132
 - 9.6.14 Anuidades vitalícias postecipadas diferidas de n anos, fracionadas, 132
 - 9.6.15 Anuidades temporárias de n anos, fracionadas postecipadas, 132
 - 9.6.16 Anuidades vitalícias antecipadas fracionadas, 133
 - 9.6.17 Anuidades vitalícias diferidas de n anos, fracionadas antecipadas, 133
 - 9.6.18 Anuidades temporárias de n anos, fracionadas antecipadas, 133

10 Prêmios Anuais Puros, 136

- 10.1 Definição de prêmio anual puro, 136
- 10.2 Seguros por falecimento, 137
 - 10.2.1 Seguro a termo fixo ou de prazo fixo, 137
 - 10.2.2 Dotal de criança, 137
 - 10.2.3 Seguro ordinário de vida (OV), 138
 - 10.2.4 Prêmio anual puro em p unidades certas, 138
 - 10.2.5 $P_{x:n}^1$ = prêmio anual puro (PAP) de seguro com vigência de n anos, pagável por um segurado de idade x , no início de cada ano, enquanto estiver vivo, limitado a n anos, 139
 - 10.2.6 ${}_m P_{x:n}^1$ = prêmio anual puro (PAP) de um seguro com vigência temporária de n anos, pagável por uma pessoa de idade x , no início de cada ano, enquanto estiver viva, mas limitado a m anos, 139

- 10.2.7 $P_{x:n|}$ = prêmio anual puro (PAP) de um seguro dotal misto com vigência de n anos, pagável por uma pessoa de idade x , 139
- 10.2.8 ${}_mP_{x:n|}$ = prêmio anual puro (PAP) de um seguro com vigência de n anos, que será pago por uma pessoa de idade x , limitados esses pagamentos a m anos, 140

11 Rendas Aleatórias Variáveis, 141

11.1 Rendas variáveis, 141

- 11.1.1 Renda vitalícia, imediata, variável em progressão aritmética, conforme N^* antecipada, 143

11.2 Anuidades ou rendas crescentes por sobrevivência conforme os números naturais (N^*) – formulações decorrentes das definições, 145

- 11.2.1 $(I_{m/a})_{x:n|}$ = valor atual de série de pagamentos em PA, desde que seja a partir de $(x + m + 1)$, enquanto estiver vivo, limitada a n anos, ou PUP de uma renda crescente conforme N^* , diferida de m anos, limitada a n anos, postecipada, 145

- 11.2.2 $(I_{m/\ddot{a}})_{x:n|}$ = valor atual de série de pagamentos em PA, a partir da idade $(x + m)$, enquanto estiver vivo, mas limitada a n anos ou PUP de renda crescente conforme os N^* , diferida de m anos, temporária de n anos, antecipada, 145

- 11.2.3 $(I_{m/a})_x$ = valor atual de série de pagamentos em PA, a partir da idade $(x + m + 1)$, enquanto estiver vivo, ou PUP de renda crescente conforme N^* , diferida de m anos, vitalícia e postecipada, 146

- 11.2.4 $(I_{m/\ddot{a}})_x$ = valor atual de série de pagamentos em PA, somente a partir da idade $(x + m)$, enquanto estiver vivo, ou PUP de uma renda crescente conforme N^* , diferida de m anos, vitalícia e antecipada, 146

- 11.2.5 $(Ia)_{x:n|}$ = valor atual de uma série de pagamentos em PA, de uma pessoa de idade x , a partir da idade $x + 1$, enquanto estiver viva, limitada a n anos ou PUP de uma renda crescente conforme N^* , imediata, temporária de n anos, postecipada, 146

- 11.2.6 $(Ia)_x$ = valor atual de uma série de pagamentos em PA, conforme N^* , a partir da idade $x + 1$, enquanto viver ou PUP de uma renda crescente conforme N^* , imediata, vitalícia e postecipada, 146

- 11.2.7 $(I\ddot{a})_{x:n|}$ = valor atual de uma série de pagamentos em PA, de uma pessoa de idade x , enquanto viver, limitada a n anos ou PUP de uma renda crescente conforme N^* , imediata, temporária de n anos, antecipada, 146

11.3 Anuidades ou rendas crescentes por sobrevivência conforme os números naturais (N^*) – utilização das comutações, 147

- 11.3.1 Renda crescente, temporária, antecipada conforme N^* , 147

- 11.3.2 Renda crescente, vitalícia, antecipada, diferida de m conforme N^* , 147

- 11.3.3 Renda crescente, temporária de n anos, diferida de m conforme N^* , antecipada, 147

- 11.3.4 Renda crescente, postecipada, temporária de n anos conforme N^* , 147
- 11.3.5 Renda crescente, postecipada, vitalícia conforme N^* , 147
- 11.3.6 Renda crescente, postecipada, conforme N^* a cada ano, até o enésimo ano, permanecendo constante em n durante os anos restantes da vida de x , 147
- 11.3.7 Renda crescente, antecipada, conforme N^* a cada ano, até o enésimo ano, permanecendo constante em n durante os anos restantes da vida de x , 147
- 11.4 Rendas variáveis fracionadas antecipadas, conforme N^* , 148
- 11.5 Rendas variáveis fracionadas postecipadas, conforme N^* , 148
- 11.6 Anuidades ou rendas decrescentes temporárias por sobrevivência, 148
 - 11.6.1 Anuidade ou renda temporária, decrescente e postecipada, 148
 - 11.6.2 Anuidade ou renda temporária, decrescente e antecipada, 148
- 11.7 Rendas aleatórias variáveis em PA – formações algébricas, 149
 - 11.7.1 Renda aleatória, imediata, variável em PA, periódica anual, vitalícia e postecipada, 149
 - 11.7.2 Renda aleatória, imediata, variável em PA, periódica anual, vitalícia e antecipada, 150
 - 11.7.3 Renda aleatória, temporária imediata, periódica anual, postecipada, variável em PA, 150
 - 11.7.4 Renda aleatória, temporária, imediata, antecipada, periódica anual, variável em PA, 151

12 Seguros por Falecimento, Capital Variável, 155

- 12.1 Conforme N^* – formulações por definições e comutações, 155
- 12.2 $(IA)_x$ = valor atual de um seguro pagável ao final do ano em que a pessoa de idade x venha a falecer, em qualquer época, cujo capital a ser pago inicialmente cresça seu próprio valor ano a ano, numa PA, conforme os números naturais (N^*), 156
- 12.3 $(IA)_{x:n}^1$ = ou ${}_{/n}(IA)_x$ = valor atual de um seguro crescente conforme N^* , que será pago ao final do ano em que a pessoa de idade x faleça, desde que seu falecimento ocorra em n anos, 157
- 12.4 $(I_{m/A})_x$ = valor atual de um seguro de uma pessoa de idade x , que será pago ao final do ano em que venha a falecer, desde que seja a partir de $x + m$ anos, em qualquer época, cujos valores a serem pagos após o falecimento obedçam os números naturais (N^*), 158
- 12.5 $I_{(m/A)}^1_{x:n}$ = valor atual de um seguro pagável no final do ano em que x venha a falecer, na vigência de n anos, no máximo até a idade de $(x + m + n)$ anos, conforme os números naturais N^* , 158
- 12.6 Dotal misto crescente conforme N^* , 158
- 12.7 $(I_{\overline{n}|A})_x$ = seguro de vida inteira, crescente conforme os N^* , que cresce até n anos e torna-se constante nos anos seguintes, 159

12.8 Seguros por falecimento com capital variável em PA, 159

- 12.8.1 $(VA)_x^\lambda$ = valor atual de um seguro variável em PA, de primeiro termo igual à unidade e com razão $-\lambda$ – pagável ao fim do ano em que haja o óbito da pessoa de idade x em qualquer período, 159
- 12.8.2 $(V_{m/A})_x^\lambda$ = valor atual de um seguro vida inteira, de capital variável, em PA, de primeiro termo igual à unidade e razão $-\lambda$ – de uma pessoa de idade x , que será pago ao final do ano em que x venha a falecer, desde que seja a partir de $(x + m)$ anos, em qualquer época, 160
- 12.8.3 $(VA)_x^1$ = valor atual de um seguro de capital variável em PA, de primeiro termo igual à unidade e de razão $-\lambda$ – que será pago ao final do ano de óbito da pessoa de idade x , desde que no período de vigência de n anos, 160
- 12.8.4 $(VA)_{x:n}^\lambda$ = valor atual de um seguro de capital variável em PA, de primeiro termo igual à unidade e razão $-\lambda$ – pagável no fim do ano em que a pessoa de idade x falecer, desde que obedecido o período de vigência de n anos, ou à própria pessoa (como dote a si mesma), o valor de $[1 + (n - 1) \cdot \lambda]$ se sobreviver à idade $(x + n)$, 161
- 12.8.5 $(V_{\bar{n}/A})_x^\lambda$ = valor atual de um seguro de capital variável em PA, de primeiro termo igual à unidade e razão $-\lambda$ –, a qual será até a idade $x + n$, quando, a partir daí, tornar-se-á vitalício e de valor igual a $[1 + (n - 1)] \cdot \lambda$ para cobertura da vida de pessoa de idade x , 161

13 Reservas, 163

- 13.1 Reservas matemáticas – conceitos e definições, 163
- 13.2 Métodos para cálculo das reservas, 165
- 13.3 Modelo prático de como se comportam as reservas no decorrer do tempo utilizando-se da tábua de mortalidade, 166
- 13.4 Método prospectivo – metodologia geral, 169
- 13.4.1 Vida inteira com prêmios anuais vitalícios (reserva prospectiva), 169
- 13.4.2 Exercício: modelo de cálculo de reserva com sobrevivência. Modelo com duas rendas, 170
- 13.4.3 Vida inteira com prêmios periódicos anuais, com temporariedade de n anos, 171
- 13.4.4 Seguro por sobrevivência – dotal puro, 172
- 13.4.5 Seguro temporário de n anos com prêmios anuais durante m anos, 172
- 13.4.6 Seguro dotal misto de n anos, com prêmios anuais durante m anos, 172
- 13.4.7 Ordinário de vida, 172
- 13.5 Método retrospectivo – metodologia geral, 174
- 13.6 Provisões – normativa SUSEP diz:, 176
- 13.7 Regimes de financiamento, 177
- 13.7.1 Regime de repartição simples, 177

- 13.7.2 Regime de repartição de capitais de cobertura ou de reserva terminal, 177
- 13.7.3 Regime de capitalização, 178

14 Prêmios Comerciais, 179

- 14.1 Prêmios com carregamento ou prêmios comerciais, 179
 - 14.1.1 Administração (γ), 179
 - 14.1.2 Produção (α), 180
 - 14.1.3 Cobrança (β), 180
- 14.2 Exercícios – modelos, 181
 - 14.2.1 Exercício 1, 181
 - 14.2.2 Exercício 2, 182

15 Invalidez, 185

- 15.1 Conceitos e definições, 185
- 15.2 Relações e simbologias, 187
- 15.3 Modelo de tábua de ativos e inválidos com base na IBGE – 2000 (ambos os sexos), 188
- 15.4 i_x = taxa anual de invalidez, 189
- 15.5 Tábuas de serviço, 190
- 15.6 Morbidade e invalidez, 191
- 15.7 Informações complementares sobre o DPVAT, 194

16 Rendas com Duas ou mais Cabeças, 195

- 16.1 Renda vitalícia imediata constante de casal, 195

17 Morbidade, Seguro-Saúde, Plano de Saúde, 198

- 17.1 Visão estatística, atuarial e financeira, 198
- 17.2 Taxa de morbilidade, 199
- 17.3 Taxa de grupos dinâmicos, 199
- 17.4 Tábuas de morbilidade, 199

18 Modelagem – Notas Técnicas, 203

- 18.1 As notas técnicas e as reavaliações atuariais, 203
- 18.2 Saúde suplementar – órgão normatizador – Agência Nacional de Saúde Suplementar (ANS), 203
- 18.3 Modelo de roteiro para nota técnica por ofício – saúde suplementar, 207
- 18.4 Modelo de roteiro para nota técnica de seguro garantia, 211
- 18.5 Modelo de roteiro para nota técnica de vida individual, 214

- 18.6 Modelo de roteiro para formatação técnica para plano previdenciário fechado, 216
- 18.7 Modelo de roteiro para nota técnica de um plano gerador de benefício livre (PGBL), 217
- 18.8 Abrangência da área técnica atuarial nas entidades, 219
 - 18.8.1 Aspectos da criatividade para desenvolvimento de inovações, 219
- 18.9 O resseguro e os atuários, 219
 - 18.9.1 Cadastro e monitoramento/*underwriting*, 220
 - 18.9.2 Solicitação e implementação de sistemas, 220
 - 18.9.3 Análise, 220
 - 18.9.4 Análise do pós-venda, 220
 - 18.9.5 Provisões e pagamento de benefícios, 220
 - 18.9.6 Avaliação atuarial, 221
 - 18.9.7 Estatísticas e estudos das tarifas e dos orçamentos das entidades, 221
 - 18.9.8 Suporte técnico, 221

19 Exercícios Propostos, 222

20 Gabaritos – Exercícios Propostos Resolvidos, 238

Referências, 277